GYMNÁZIUM CHEB

SEMINÁRNÍ PRÁCE

Pravidelná tělesa

Cheb, 2006 Lukáš Louda,7.B

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem seminární práci na téma:

„Pravidelná tělesa“

vypracoval zcela sám za použití pramenů uvedených v přiložené bibliografii na počítači v programech Microsoft Word XP.

V Chebu dne 29. května 2006 ………………………………

Podpis řešitele

Obsah

1. Úvod

V rámci předmětu Seminář z matematiky žáci na konci septimy vypracovávají seminární práci. Tento rok měli žáci možnost výběru tématu, já jsem si vybral téma pravidelná tělesa, z oboru geometrie, který je mi bližší než aritmetika.

Po vypracování této seminární práce si žáci navzájem zkontrolují práce. každý žák „zkritizuje“ práci druhého žáka v tzv. oponentuře.

2. Metodika

v této seminární práci jsem se zaměřil na pravidelná tělesa a jejich zvláštnosti. Cílem mého snažení bylo objasnit některé vlastnosti těchto těles a shrnout všechny důležitá prav. tělesa a uvést jejich vlastnosti : Obsahy, Povrchy, obvody, vnitřní úhly a jiné veličiny. Také jsem u každého tělesa vytvořil jeho obrázek a ukázal důležité úsečky, body, osy pravidelnosti.

3. Téma : Pravidelná tělesa

- by se dali dělit podle soustavy, ve které se zobrazují

a) dvourozměrná (rovinná)
b) třírozměrná (prostorová)
c) čtyřrozměrná

-podle osy, podle které jsou souměrné

a) souměrné podle bodu
b) souměrné podle přímky
c) souměrné podle roviny

3.1 Pravidelné rovinné geometrické útvary

- Tyto útvary lze také nazvat pravidelné n-úhelníky.
- Mezi ně patří:
  - rovnostranný trojúhelník
  - čtverec
  - pětiúhelník
  - šestiúhelník
  - sedmiúhelník
  - ……..
  - ……..

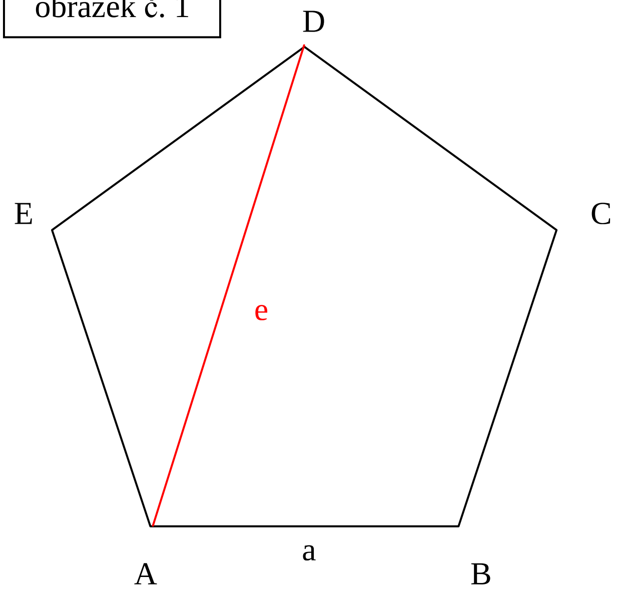
Jako příklad jsem si vybral pětiúhelník, a to hlavně proto, že si ho vybíraly různé kultury jako symbol, tzv. pentagram.

Velkou zajímavostí je také že poměr délek nejdelší úhlopříčky a strany je roven zlatému řezu[1].

<u>Pětiúhelník</u>

Veličina	**Vzorec**
obvod	$o = 5 \cdot a$
Obsah	$S = \dfrac{a^2\,(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})}{4}$
r kružnice opsané	$r = \dfrac{a\,\sqrt{(50 + 10\sqrt{5})}}{10}$

obrázek č. 1



[1] Zlatý řez je číslo 1,618. Pro mnoho lidí je toto číslo magické, hlavně proto, že v přírodě, vědě i umění mají některé věci poměr velmi podobný zlatému řezu.

3.1.1 n-úhelník

- je rovinný obrazec omezený n-úsečkami, které spojují n-bodů. Podmínkou je , že tři sousední body nesmí ležet v přímce.

pojmy :

strana – úsečka, která spojuje dva body (a, b, c, d, e)

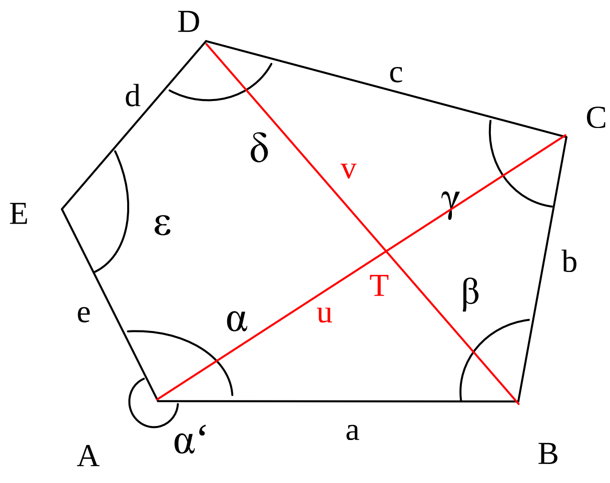
vrcholy – body mnohoúhelníka (A, B, C, D, E)

úhlopříčka – úsečka, která spojuje dva nesousední body (u, v)

vnitřní úhel – úhel , který leží uvnitř n-úhelníka (α, β, γ, δ, ε)

vnější úhel – úhel, který leží vně n-úhelníka (α‘, β‘, γ‘, δ‘, ε‘)

obrázek č. 2



Veličina	Vzorec
Obvod	$o = a + b + c \ldots$
Obsah	$S = S_1 + S_2 + S_3 \ldots$
Součet vnitřních úhlů	$\varphi = \frac{1}{2}\ \pi\ (2n-4)$ rad
Počet úhlopříček	$s = \frac{1}{2}\, n\, (n-3)$

Výpočet obsahu

Jedna z mnoha možností je sečíst obsahy jednotlivých trojúhelníků, ze kterých se skládá každý n-úhelník. Jejich počet je určen vzorcem $s = n$[2] - 2. Podle obrázku č. 2 bychom tento nepravidelný pětiúhelník rozdělili na tři trojúhelníky:

1. Δ ABC ; 2. Δ ECD ; 3. Δ ACE

---

[2] n - počet vrcholů nebo stran n-úhelníka; n je kladné celé číslo

3.1.2 Pravidelný n-úhelník

DF. – n-úhelník je rovinný útvar, který má všechny vnitřní úhly stejně velké. (všechny strany mají také stejnou velikost)

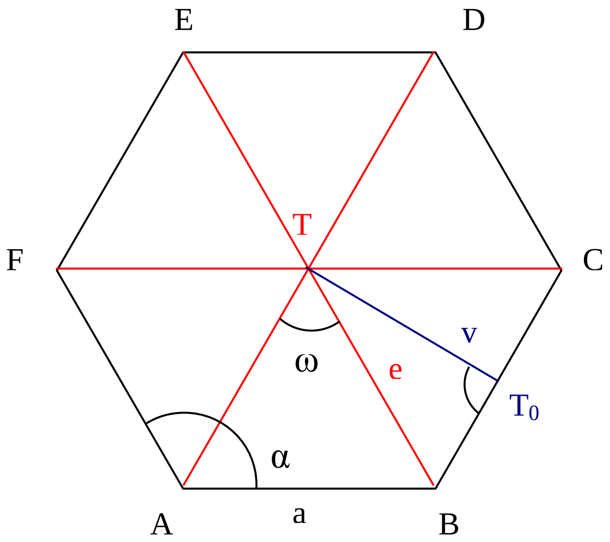
V. – pravidelný n-úhelník má stejně velké úhlopříčky, vnější úhly

V. – v pravidelném n-úhelníku má těžiště (průsečík úhlopříček) stejnou vzdálenost od všech vrcholů.

V. – v bodě T je n-úhelník bodově souměrný.

V. – každému prav. n-úhelníku lze opsat kružnici.

obrázek č.3



Veličina	**Vzorec**
obvod	$o = n^{*} \cdot a$
obsah	$S = n^{*} \cdot \Delta\, ABT$
Vnitřní úhel	$\alpha = \dfrac{(n^{*}-2)\ \pi}{n}$
Středový úhel	$\omega = \dfrac{2\ \pi}{n^{*}}$

* n – počet stran n-úhelníka

Δ ABT – rovnoramenný Δ

Pojmy: (viz. obecný n-úhelník)

středová úhlopříčka – úhlopříčka, která prochází středem T

těžiště (střed) – bod, ve kterém je vzdálenost od všech vrcholů nebo stran stejná. V pravidelném n-úhelníku je to průsečík všech středových úhlopříček.

3.1.3 Důkaz :

Čím víc bude mít n-úhelník vrcholů, tím více se bude podobat kružnici (opsané).

Z této hypotézy lze přibližně vypočítat Ludolfovo číslo π.

Číslo π je dáno vztahem :

$(o = d \cdot \pi)$ $\pi = o : d$

U obvodu n-úhelníka si místo π vyjádříme neznámou x. Tato neznámá bude vyjadřovat podíl středové úhlopříčky, která připomíná průměr u kružnice, a obvodu. ($o = n* \cdot a$) zadané budeme mít pouze n a úhlopříčku e, která je podobná průměru kružnice .

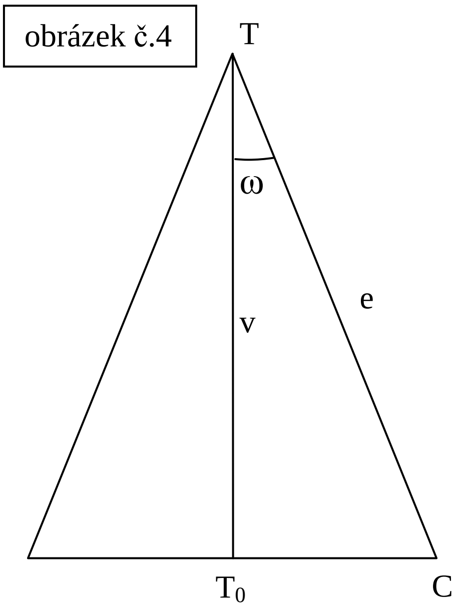
pomocí úhlopříčky e vypočteme obvod:

$o = n \cdot a$

e vyjádříme pomocí a

výšku v vypočteme z $\Delta\ T_0CT$:

obrázek č.4



$\text{tg}\ \omega = ½\ a : v$ $\quad (\omega = 180° : n)$

$\text{tg}\ (180° : n) = ½\ a : v$

$v = ½\ a : \text{tg}\ (180° : n)$

výšku dosadíme do vzorce :

$e = 2\ [\ \sqrt{(½\ a : \text{tg}\ (180° : n)}\ ^2 + ¼\ a^2\ ]$

vyjádříme a :

$$a = \sqrt{\frac{e^2 : 4}{(\frac{1}{4} : (\mathrm{tg}\,(180 : n)^2) + \frac{1}{4}}}$$

$$o = n \cdot \sqrt{\frac{e^2 : 4}{(\frac{1}{4} : (\mathrm{tg}\,(180 : n)^2) + \frac{1}{4}}}$$

nyní nemáme ve vzorci pro obvod žádnou neznámou

Můžeme si dosadit konkrétní hodnoty

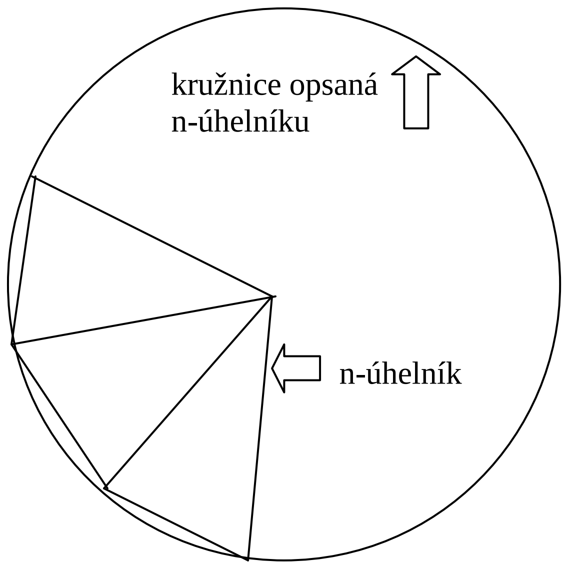
úhlopříčka n-úhelníka bude např. 10 cm

počet vrcholů n-úhelníka bude 120.

$$o = 120 \sqrt{\frac{10^2 : 4}{(\frac{1}{4} : (\mathrm{tg}\,(180° : 120)^2) + \frac{1}{4}}} \quad .$$

o = 0,261769483

obrázek č. 5



nyní vypočteme neznámou x :

x = o : e

x = 3,14123376

toto číslo je velmi podobné číslu π.

Pokud budeme počítat s n-úhelníky s větším počtem vrcholů, dospějeme k názoru, že vypočtené hodnoty se budou blížit právě číslu π.

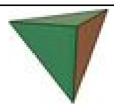
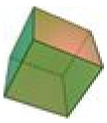
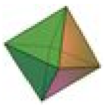
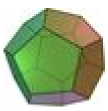
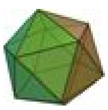
Z tohoto důkazu vyplývá že lim x = π

3.2 Prostorová tělesa

DF. – je pravidelný konvexní mnohostěn , kde z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří stejný pravidelný n-úhelník.

tyto tělesa lze shrnou do skupiny tzv. Platónských těles. Platónských těles je jen pět.

3.2.1 Platónská tělesa

název	**obrázek**	**počet stěn**	**počet hran**	**počet vrcholů**	**typ stěny**	**počet hran u vrcholu**	**povrch (hrana délky a)**	**objem (hrana délky a)**
pravidelný čtyřstěn (tetraedr)		4	6	4	trojúhelník	3	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
krychle (pravidelný šestistěn, hexaedr)		6	12	8	čtverec	3	$6a^2$	a^3
pravidelný osmistěn (oktaedr)		8	12	6	trojúhelník	4	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)		12	30	20	pětiúhelník	3	$3\sqrt{25+10\sqrt{}}$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$
pravidelný dvacetistěn (ikosaedr)		20	30	12	trojúhelník	5	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$

4. Závěr

Pravidelná tělesa nenašla uplatnění jen v geometrii. Aplikace znalostí platónských těles je např. v chemii, kde se sestrojují molekuly různých minerálů. mezi atomy stejného prvku vznikají stejně velké síly a vznikají pravidelná tělesa nebo jim podobná. Další použití je např. v architektuře nebo designu, kde je těchto těles užíváno velmi často.

Toto téma je velmi staré, řešení příkladů, vzorce, důkazy znali už ve starém Řecku (např.Platónská tělesa). Od té doby se toho mnoho nezjistilo. Až s příchodem prostorů vyšší dimenze. V těchto prostorech je užito více jak tři osy (x , y, z). Např. ve čtyřrozměrném prostoru krychle jakou jí známe se mění v tzv. hyperkrychli (teserakt) . Tyto tělesa nelze zobrazit reálně, protože člověk žije v trojrozměrném světě. Chybí čtvrtý rozměr.

5. Seznam obrázků

Použité vlastní obrázky

Použité stažené obrázky

Bibliografie

Zdroj : knihy

učebnice matematiky

RNDr. Eva Pomykalová – Matematika pro gymnázia Planimetrie

matematické tabulky

internet

www.wikipeda.org